GI/G/1系に対する拡散近似(待ち行列理論とその周辺)

大曽根, 匡

数理解析研究所講究録
519巻 1984年 156-168

GI/G/1系に対する拡散近似

東京工大大学院　大曽根　匡 (Tadashi Ohsone)

1. はじめに

GI/G/1系の系内客数に対する拡散近似は、Heyman、Kobayashi、Gelenbe などによって研究されており、いろいろな近似式が提案されている。しかし、最近、Whitt [5] は、これらの近似式を厳密解や不等式などと比較することにより、ある場合にはこれらの近似式は非常に精度が悪いことを示し、拡散近似式の精度を高める必要があることを主張した。本稿では、GI/G/1系の系内客数の分布、平均、分散の新しい近似式を提案し、厳密解や他の拡散近似式と比較することにより、ある場合においては精度が非常に良くなっていることを示す。

2. 従来の拡散近似式

まず、記号を準備する。

$Q(t)$ ：系内客数過程

$X(t)$ ：$Q(t)$ を近似する拡散過程

Q：定常状態における $Q(t)$

X：定常状態における $X(t)$

$p(x)$ ：X の確率密度関数

$\pi_n = P\{Q = n\}$

$\tilde{\pi}_n$ ：π_n の近似式

λ：客の到着率

μ：サービス率

c_a：客の到着間隔分布の変動係数

c_s：サービス時間分布の変動係数

$\rho = \lambda / \mu$

$b = \lambda - \mu$

$a = \lambda c_a^2 + \mu c_s^2$

$$\gamma = \frac{2b}{a} = -\frac{2(1-\rho)}{\rho c_a^2 + c_s^2}$$

$\alpha = \exp(\gamma)$

本稿においては、定常状態におけるGI／G／1系を考えるので $\rho < 1$ を仮定する。

（1）Heymanの近似式

Heyman［2］は反射壁境界をもつ拡散過程で系内客数

過程を近似し、次の近似式を得た：

$$p(x) = -\gamma \exp(\gamma x)$$

$$\tilde{\pi}_n = \int_n^{n+1} p(x)dx = (1-\alpha)\alpha^n$$

$$\tilde{E}[Q] = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\pi}_n = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$\widetilde{Var}[Q] = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

（2）Kobayashiの近似式

Kobayashi［3］も系内客数過程を反射壁境界をもつ拡散過程で近似したが、その際に、$\pi_0 = 1-\rho$ であることを考慮して次の近似式を得た。

$$p(x) = -\rho\gamma \exp(\gamma x)$$

$$\tilde{\pi}_n = \int_{n-1}^{n} p(x)dx = \begin{cases} 1-\rho & \text{for } n=0 \\ \rho(1-\alpha)\alpha^{n-1} & \text{for } n \geqq 1 \end{cases}$$

$$\tilde{E}[Q] = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\pi}_n = \frac{\rho}{1-\alpha}$$

$$\widetilde{Var}[Q] = \frac{\rho(1+\alpha-\rho)}{(1-\alpha)^2}$$

（3）Gelenbe の近似式

Gelenbe［1］は、基本復帰境界をもつ拡散過程で系内客数過程を近似した。その際に、$\pi_0 = 1-\rho$ についても考

慮して次の近似式を導いた：

$$p(x)=\begin{cases}\rho\{1-\exp(\gamma x)\}, & \text{for } 0<x\leqq 1\\ \dfrac{\rho}{\alpha}(1-\alpha)\exp(\gamma x), & \text{for } 1<x\end{cases}$$

$$\tilde{\pi}_n=\int_{n-1}^{n}p(x)\,dx=\begin{cases}1-\rho & \text{for } n=0\\ \rho(\gamma-\alpha+1)/\gamma & \text{for } n=1\\ -\rho(1-\alpha)^2\alpha^{n-2}/\gamma & \text{for } n\geqq 2\end{cases}$$

$$\tilde{E}[Q]=\sum_{n=1}^{\infty}n\tilde{\pi}_n=\rho\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)=\rho+\frac{\rho C_a^2+C_s^2}{2(1-\rho)}$$

$$\tilde{V}ar[Q]=\rho-\frac{\rho(3-\alpha)}{\gamma(1-\alpha)}-\{\tilde{E}[Q]\}^2$$

3. 提案する拡散近似式

系内客数過程を拡散過程の原点での滞留時間が平均 $1/\Lambda$ の指数分布に従うような基本復帰境界をもつ拡散過程で近似する。これを表現する定常状態での拡散方程式は次の式で与えられる：

$$\frac{1}{2}a\frac{d^2}{dx^2}p(x)-b\frac{d}{dx}p(x)=-\Lambda\tilde{\pi}_0\,\delta(x-1)$$

$$\left.\frac{1}{2}a\frac{d}{dx}p(x)-b\,p(x)\right|_{x=0}=\Lambda\tilde{\pi}_0$$

これを次の３条件のもとで解く。

$$\lim_{x\downarrow 0} p(x) = \xi$$
$$\lim_{x\uparrow 1} p(x) = \lim_{x\downarrow 1} p(x)$$
$$\tilde{\pi}_0 + \int_0^\infty p(x)\,dx = 1$$

未知定数 Λ と ξ は $\tilde{\pi}_0 = 1-\rho$ とM／G／1系の平均が一致するように決める。まず、$\tilde{\pi}_0 = 1-\rho$ を用いて上の方程式を解くと

$$p(x) = \begin{cases} \left(\xi - \frac{\xi}{\gamma} - \rho\right)\exp(\gamma x) + \frac{\xi}{\gamma} + \rho & \text{for } 0 < x \leqq 1 \\ \left\{\xi + \left(\frac{\xi}{\gamma} + \rho\right)\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\right\}\exp(\gamma x) & \text{for } 1 \leqq x \end{cases}$$

が得られる。これから、系内客数の分布の近似式が導かれる:

$$(1) \qquad \tilde{\pi}_n = \int_{n-1}^{n} p(x)\,dx = \begin{cases} 1-\rho & \text{for } n=0 \\ \rho - G & \text{for } n=1 \\ G(1-\alpha)\alpha^{n-2} & \text{for } n \geqq 2 \end{cases}$$

ここで

$$(2) \qquad G = \frac{1}{\gamma}\left\{\left(\frac{\xi}{\gamma} + \rho\right)(\alpha - 1) - \alpha\xi\right\}$$

$$\gamma = \gamma(C_a, C_s) = -\frac{2(1-\rho)}{\rho C_a^2 + C_s^2}$$

$$\alpha = \alpha(C_a, C_s) = \exp\{\gamma(C_a, C_s)\}$$

である。(1)から、平均系内客数の近似式

$$(3) \qquad \tilde{E}[Q] = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\pi}_n = \rho + \frac{G}{1-\alpha}$$

が導かれる。一方、M／G／1系に対しては、厳密に

$$(4) \qquad E_{M/G/1}[Q] = \rho + \frac{\rho^2(1+C_s^2)}{2(1-\rho)}$$

である。したがって、$C_a = 1$の時の(3)が(4)と一致するようにGを定めると

$$G = \frac{\rho^2(1+C_s^2)\{1-\alpha(1, C_s)\}}{2(1-\rho)}$$

が得られる。これは、M／G／1系に対して

$$\xi = \frac{\{\gamma(1, C_s)\}^2\{1-\alpha(1, C_s)\}\rho C_s^2}{2[1+\alpha(1, C_s)\{\gamma(1, C_s)-1\}]}$$

ということである。ここで，GI／G／1系に対しては、$\gamma(1, C_s)$と$\alpha(1, C_s)$をそれぞれ$\gamma(C_a, C_s)$と$\alpha(C_a, C_s)$でおきかえると、すなわち

$$\xi = \frac{\gamma^2(1-\alpha)\rho C_s^2}{2\{1+\alpha(\gamma-1)\}}$$

とすると、(2)より

$$G = \frac{\rho^2(1-\alpha)(C_a^2+C_s^2)}{2(1-\rho)}$$

を得る。

以上をまとめると、GI／G／1系に対する系内客数の分布の近似式として、次の近似式が得られた：

$$\tilde{\pi}_n = \begin{cases} 1-\rho & \text{for } n=0 \\ \rho - G & \text{for } n=1 \\ G(1-\alpha)\alpha^{n-2} & \text{for } n \geqq 2 \end{cases}$$

ここで

$$G = \frac{\rho^2(1-\alpha)(C_a^2+C_s^2)}{2(1-\rho)}$$

$$\alpha = \exp\left\{-\frac{2(1-\rho)}{\rho C_a^2 + C_s^2}\right\}$$

これから、系内客数の平均、2乗平均、分散についての近似式が導かれる：

(5) $$\tilde{E}[Q] = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\pi}_n = \rho + \frac{\rho^2(C_a^2+C_s^2)}{2(1-\rho)}$$

$$\tilde{E}[Q^2] = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\tilde{\pi}_n = \rho + \frac{(3-\alpha)(\tilde{E}[Q]-\rho)}{1-\alpha}$$

$$\widetilde{Var}[Q] = \tilde{E}[Q^2] - \{\tilde{E}[Q]\}^2$$

(5)式は、Sakasegawa [4] のGI/G/m系の平均系内客数の近似式

$$\tilde{E}[Q] = \rho + \frac{\rho^{\sqrt{2(m+1)}}(C_a^2+C_s^2)}{2(1-\rho)}$$

における $m=1$ の場合と一致する。

4．数値例

表１～６において、$E_2/E_2/1$、$M/M/1$、$H_2/H_2/1$（$C_a^2=2.0$）の３つの場合の系内客数の平均、分散に対して提案した近似式と従来の近似式を厳密解との相対誤差の観点から比較する。それによると、$E_2/E_2/1$系に対しては、Kobayashiの近似式の方が提案した近似式よりも精度が良いが、提案した近似式もそれほど悪くないことがわかる。その他の場合では、提案した近似式の方が他の近似式よりも非常に精度が良いことがわかる。特に、ρが小さな場合に顕著である。

表７～８において、提案した近似式と厳密解を分布に対して比較する。これから、分布に対しても提案した近似式は精度が良いことがわかる。

5．おわりに

ここで提案した近似式は、非常に簡単な形の式でありながら、実用上、十分であろうと思われるぐらい精度が良い。C_aが小さなところでは、少し精度が悪いようであるが、これは$D/M/1$系の厳密解などを利用することにより、精度をあげることが可能と思われる。

Table 1. The relative errors (%) for the mean number of customers in the $E_2/E_2/1$ system.

ρ	PROPOSED	GELENBE	KOBAYASHI	HEYMAN
0.1	3.92	28.43	1.96	- 61.76
0.2	6.13	29.72	1.42	- 64.62
0.3	7.37	29.50	0.00	- 61.36
0.4	7.89	28.14	- 1.21	- 55.47
0.5	7.91	25.90	- 2.30	- 48.49
0.6	7.36	22.70	- 2.97	- 40.49
0.7	6.31	18.57	- 3.08	- 31.67
0.8	4.71	13.43	- 2.71	- 22.03
0.9	2.63	7.30	- 1.70	- 11.51
0.95	1.39	3.81	- 0.94	- 5.89

Table 2. The relative errors (%) for the variance of the number of customers in the $E_2/E_2/1$ system.

ρ	PROPOSED	GELENBE	KOBAYASHI	HEYMAN
0.1	11.58	86.32	6.32	- 56.84
0.2	18.75	88.02	4.69	- 58.33
0.3	21.22	80.39	0.64	- 52.09
0.4	20.59	68.28	- 2.52	- 43.70
0.5	17.50	53.05	- 4.48	- 34.06
0.6	13.03	36.69	- 4.95	- 24.07
0.7	8.20	21.71	- 3.99	- 14.67
0.8	3.89	9.78	- 2.30	- 6.92
0.9	0.99	2.38	- 0.69	- 1.78
0.95	0.25	0.58	- 0.19	- 0.45

Table 3. The relative errors (%) for the mean number of customers in the M/M/1 system.

ρ	PROPOSED	GELENBE	KOBAYASHI	HEYMAN
0.1	0.00	45.05	11.71	118.02
0.2	0.00	40.00	8.80	43.20
0.3	0.00	34.97	6.06	18.18
0.4	0.00	29.99	4.20	10.49
0.5	0.00	25.00	2.80	5.50
0.6	0.00	20.00	1.67	2.73
0.7	0.00	15.00	0.90	1.29
0.8	0.00	10.00	0.38	0.48
0.9	0.00	5.00	0.09	0.10
0.95	0.00	2.50	0.02	0.02

Table 4. The relative errors (%) for the variance of the number of customers in the M/M/1 system.

ρ	PROPOSED	GELENBE	KOBAYASHI	HEYMAN
0.1	2.44	133.33	37.40	143.90
0.2	3.19	102.88	25.24	55.27
0.3	3.76	77.94	17.32	28.10
0.4	3.42	56.35	14.58	15.30
0.5	2.75	38.50	7.00	8.40
0.6	2.00	24.27	4.03	4.48
0.7	1.23	13.42	2.03	2.15
0.8	0.59	5.87	0.82	0.84
0.9	0.16	1.44	0.18	0.19
0.95	0.04	0.36	0.04	0.04

Table 5. The relative errors (%) for the mean number of customers in the $H_2/H_2/1$ system.

ρ	PROPOSED	GELENBE	KOBAYASHI	HEYMAN
0.1	0.00	81.97	46.72	547.54
0.2	0.00	66.67	37.00	251.67
0.3	- 0.18	53.58	29.21	151.25
0.4	- 0.32	42.41	22.65	99.68
0.5	- 0.40	32.80	17.13	67.86
0.6	- 0.46	24.43	12.48	46.04
0.7	- 0.45	17.11	8.58	30.01
0.8	- 0.41	10.65	5.21	17.69
0.9	- 0.26	4.99	2.39	7.93
0.95	- 0.14	2.42	1.15	3.78

Table 6. The relative errors (%) for the variance of the number of customers in the $H_2/H_2/1$ system.

ρ	PROPOSED	GELENBE	KOBAYASHI	HEYMAN
0.1	14.02	271.95	162.20	761.59
0.2	16.29	177.72	107.68	305.99
0.3	14.62	116.47	71.77	160.40
0.4	11.62	75.58	47.30	91.71
0.5	8.48	47.68	30.25	53.42
0.6	5.64	28.41	18.23	30.19
0.7	3.28	15.23	9.87	15.59
0.8	1.51	6.59	4.31	6.57
0.9	0.39	1.64	1.08	1.60
0.95	0.10	0.41	0.27	0.40

Table 7. Distribution of the number of customers in the M/M/1 system.

ρ		n	0	1	2	3	4
0.1	EXACT	π_n	0.900	0.090	0.009	0.001	0.000
	APPROX.	$\tilde{\pi}_n$	0.900	0.091	0.007	0.001	0.000
0.3	EXACT	π_n	0.700	0.210	0.063	0.018	0.006
	APPROX.	$\tilde{\pi}_n$	0.700	0.215	0.056	0.019	0.006
0.5	EXACT	π_n	0.500	0.250	0.125	0.063	0.031
	APPROX.	$\tilde{\pi}_n$	0.500	0.257	0.118	0.061	0.031
0.7	EXACT	π_n	0.300	0.210	0.147	0.103	0.072
	APPROX.	$\tilde{\pi}_n$	0.300	0.214	0.144	0.101	0.071
0.9	EXACT	π_n	0.100	0.090	0.081	0.073	0.066
	APPROX.	$\tilde{\pi}_n$	0.100	0.091	0.081	0.073	0.066

Table 8. Distribution of the number of customers in the $M/E_2/1$ system.

ρ		n	0	1	2	3	4
0.1	EXACT	π_n	0.900	0.092	0.007	0.001	0.000
	APPROX.	$\tilde{\pi}_n$	0.900	0.092	0.008	0.000	0.000
0.3	EXACT	π_n	0.700	0.226	0.057	0.013	0.003
	APPROX.	$\tilde{\pi}_n$	0.700	0.220	0.066	0.011	0.002
0.5	EXACT	π_n	0.500	0.281	0.127	0.054	0.022
	APPROX.	$\tilde{\pi}_n$	0.500	0.263	0.150	0.055	0.020
0.7	EXACT	π_n	0.300	0.247	0.166	0.106	0.067
	APPROX.	$\tilde{\pi}_n$	0.300	0.218	0.190	0.115	0.070
0.9	EXACT	π_n	0.100	0.110	0.101	0.089	0.078
	APPROX.	$\tilde{\pi}_n$	0.100	0.091	0.108	0.093	0.081

References

[1] Gelenbe, E., "Probabilistic Models of Computer Systems Part II : Diffusion Approximations, Waiting Times and Batch Arrivals," Acta Informatica, 12, 285-303 (1979).

[2] Heyman, D.P., "A Diffusion Model Approximation for the GI/G/1 Queue in Heavy Traffic," The Bell System Technical Journal, 54, 1637-1646 (1975).

[3] Kobayashi, H., "Application of the Diffusion Approximation to Queueing Networks I: Equilibrium Queue Distributions," Journal of the Association for Computing Machinary, 21, 316-328 (1974).

[4] Sakasegawa, H., "An Approximation Formula $L_q \simeq \alpha\rho^{\beta}/(1-\rho)$," Annals of the Institute of Statist. Math., 29, (1977).

[5] Whitt, W., "Refining Diffusion Approximations for Queues," Operations Research Letters, 1, 165-169 (1982).